Serie 3

1. **Geburtstagsparadoxon:** Wir haben eine zufällige Gruppe von N Personen, welche alle im Jahr 2019 (kein Schaltjahr) geboren sind.

   a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass alle $N \geq 1$ Personen an verschiedenen Tagen geboren wurden.

   b) Wie gross muss N mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen am selben Tag geboren wurden, mindestens $\frac{1}{2}$ ist.

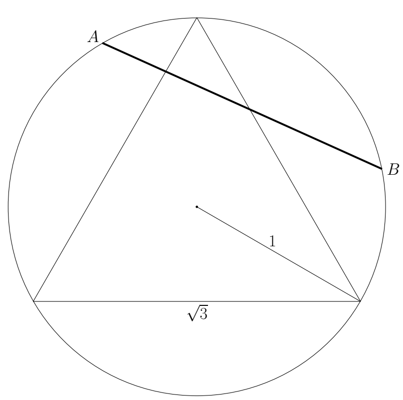
   c) Berechne diese Wahrscheinlichkeit für $N = 50$.

2. **Prinzip von Inklusion und Exklusion:** Seien A_i, $i = 1, \ldots, n$, beliebige Ereignisse, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist. Es gilt dann folgende Regel:

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}].$$

   Beweisen Sie diese Formel durch Induktion nach n.

3. **Paradoxon von Bertrand**
   Eine Sehne wird zufällig auf dem Einheitskreis eingezeichnet. Geben Sie mindestens zwei verschiedene (natürliche) Möglichkeiten an, die Sehne zufällig zu wählen (verschiedene Wahlen entsprechen verschiedenen Grundräumen) und berechnen Sie für jedes dieser Modelle die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge der Sehne grösser ist als $\sqrt{3}$, der Seitenlänge eines im Einheitskreis eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks. Siehe auch Abbildung 1 unten.



Bitte wenden!

4. **Markierte Fische:** Um die Anzahl Fische N in einem Teich zu schätzen, wird folgendes Experiment durchgeführt: 10 Fische werden eingefangen, mit einem Merkmal versehen und wieder in den Teich gebracht. Man nimmt an, dass sich nach einer gewissen Zeitspanne die gekennzeichneten Fische mit den übrigen gut vermischt haben. Danach fängt man 15 Fische zufällig, wobei davon X markiert und $15 - X$ nicht markiert sind. In einem konkreten Fall zählt man darunter $X = 4$ markierte und 11 nicht markierte Fische.

   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_N von X als Funktion von N und untersuchen Sie dann, für welches N die Wahrscheinlichkeit $P_N[X = 4]$ maximal wird.

   Hinweis: Untersuchen Sie dazu $g(N) := P_N\big[X = 4\big]/P_{N+1}\big[X = 4\big]$.

Abgabe: Montag 9. März in der Übungsstunde.